САБАҚ № 11

Жаттығу 1. *$(0;1)$ интервалын ұзындығы ақырлы $(a;b)$ интервалына бейнелейтін картаны жазыңыз.*

Шешуі. Карта деген не? Алдымен соны анықтайық.

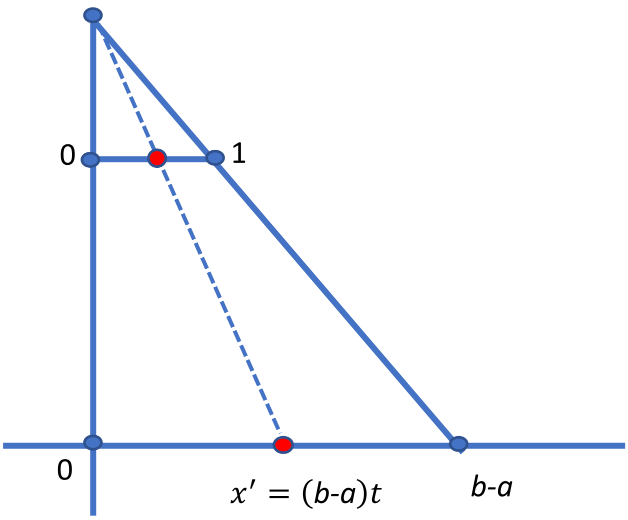
$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow U \subset S, \qquad S \subset \mathbb{R}$$

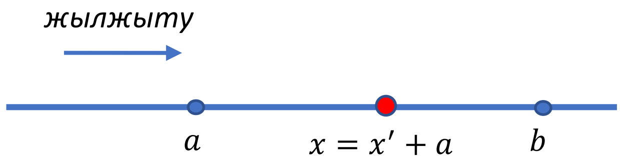
бейнелеуі гомеоморфты (≡ үзіліссіз + өзара бірмәнді≡биективті) болса, φ – *карта* немесе S *қисықтың локальді картасы* деп аталады.

$(0;1)$ интервалының әр нүктесін t арқылы белгілейік: $0 < t < 1$. $(a;b)$ интервалының әр x нүктесі бір ғана t-ға сәйкес келетіндей карта ретінде

$$x = \varphi(t) \equiv a + (b-a)t$$

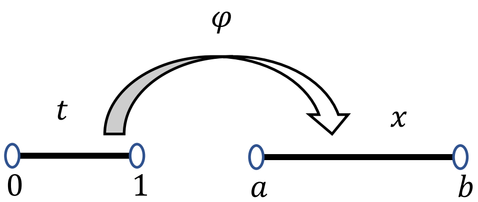
алуға болады. Бұл картаның геометриялық мағынасы – екі қозғалыстың суперпозициясы болуы. Алдымен, $(0;1)$ интервалын $(0;b-a)$ интервалына *гомотетия* (сурет а).) арқылы бейнелейміз. Екінші қозғалыс: *жылжыту* (сурет б).) арқылы $(0;b-a)$ интервалының бейнесін, яғни, $(a;b)$ интервалын аламыз.





сурет а). сурет б).

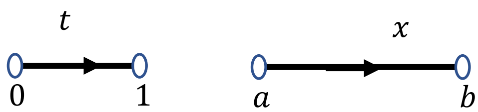
Нәтижесінде:



Математикалық анализ курсынан еске түсіру:

> ***Теорема.(*** *кері функцияның бар болуы туралы*) $y = f(x)\colon [a;b] \to [m;M]$ *берілсін. Егер*
>
> $[a;b]$*-да* $y = f(x)$ – анықталған; – үзіліссіз; – қатаң монотонды, *онда* $[m;M]$*-де* $\exists\, x = f^{-1}(y)$ – анықталған; – үзіліссіз; – қатаң комонотонды.

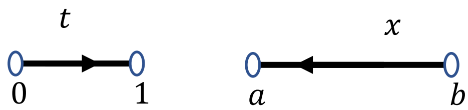
$\varphi(t)$ -қатаң өспелі, үзіліссіз болғандықтан $t \to \varphi(t)$ сәйкестігі өзара бірмәнді болады. $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ орындалады. Демек, t-ң өсу бағытымен $\varphi(t)$-ң өсу *бағыты сәйкес*.



Интервалдың картасы t-ға байланысты *дифференциалданғандықтан* $(a;b)$-бір өлшемді *тегіс* көпбейне болады. Осы сияқты бірнеше карталарды келтіруге болады.
Егер карта

$$x = \varphi(t) \equiv b - (b-a)t$$

түрде болса,



онда, *қарсы бағытталған* көпбейне аламыз.
Енді

$$x = \psi(t) \equiv a + (b-a)t^2$$

картаны қарастырайық. Бұл карта да сандық өстің бойындағы $(0;1)$ интервалын кез-келген $(a;b)$ интервалына өзара бірмәнді бейнелейді. Бұл картаның алдыңғы картадан айырмашылығы – жылдамдықтарында.

$$\varphi'(t) = (b-a)$$

- тұрақты болғандықтан көпбейненің өзгеруі бірқалыпты болады. Ал,

$$\psi'(t) = 2(b-a)t$$

$0 < t < \frac{1}{2}$ өзгерсе, $\psi'(t) < \varphi'(t)$. Демек, $\varphi(t)$ картаға қарағанда $\psi(t)$ баяу өзгереді.

$\frac{1}{2} < t < 1$ өзгерсе, $\varphi'(t) < \psi'(t)$. Демек, $\varphi(t)$ картаға қарағанда $\psi(t)$ жылдам өзгереді.

Сонымен, $\varphi(t)$ және $\psi(t)$ карталары $(0; 1)$ интервалы мен $(a; b)$ интервалының арасында өзара бірмәнді сәйкестік қондырады. Ал, $(a; b)$ интервалын

$$t = f(x) \equiv \frac{x - a}{b - a}$$

карта арқылы $(0; 1)$ интервалына өзара бірмәнді бейнелеуге болады.

Жаттығу 2*. $(0; 1)$ интервалын $(-\infty; +\infty)$ интервалына бейнелейтін картаны жазыңыз.*

Шешуі. $(0; 1)$ интервалының әр нүктесін t арқылы белгілейік: $0 < t < 1$. $(-\infty; +\infty)$ интервалының әр x нүктесі бір ғана t-ға сәйкес келетіндей карта ретінде

$$x = \varphi(t) \equiv -ctg\pi t$$

алуға болады. $\varphi(t)$ -қатаң өспелі, үзіліссіз болғандықтан $t \to \varphi(t)$ сәйкестігі өзара бірмәнді болады. t-ң өсу бағытымен $\varphi(t)$-ң өсу бағыты сәйкес. Интервалдың картасы t-ға байланысты дифференциалданғандықтан $(-\infty; +\infty)$ - бір өлшемді тегіс көпбейне болады. $(0; 1)$ интервалын $(-\infty; +\infty)$ интервалына бейнелейтін басқа да карта жазуға болады. Мысалы,

$$x = \psi(t) \equiv \begin{cases} \frac{1}{t}, & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4t - 3}{t - 1}, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

картаны алсақ, ол t-ң өсу бағытымен қарсы бағытталған. Тағы да бірнеше картаны жазуды оқырманның үлесіне қалдырамыз.

Жаттығу 3*. $(a; b)$ интервалының бейнесі $(-\infty; +\infty)$ бір өлшемді тегіс көпбейне болатындай карта құрастырыңыз.*

Шешуі. Алдыңғы мысалдарда $(a; b) \leftrightarrow (0; 1)$ және $(0; 1) \leftrightarrow (-\infty; +\infty)$ карталарды құрастырдық. Қатаң өспелі, үзіліссіз карталардың суперпозициясы да комонотонды карта болатындықтан

$$x = \varphi(t) \equiv -ctg\pi\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$$

- $(a;b)$ интервалының бейнесі $(-\infty;+\infty)$ - бір өлшемді тегіс көпбейне болатындай карта бола алады.

Қорытынды:

- *Қисықты бірнеше карта арқылы беруге болады;*
- *Картаның бағыты болады;*
- *Карталардың бір-бірінен айырмашылығы: жылдамдықтары әртүрлі;*
- *Карталардың суперпозициясы карта болады.*

Енді интервалдың бейнесі *жазықтықтағы қисық* болатындай карталарды қарастырайық.

Тапсырмалар

1. Параллель көшіру түрлендіруі гомеоморфты бола ма? Жауабыңызды негіздеңіз.
2. Вектордың бағыты бойынша $\mu \neq 0$ коэффициентке сығу гомеоморфизм бола ма? Жауабыңызды негіздеңіз.
3. $(0;2)$ интервалын кез-келген $(a;b)$ интервалына бейнелейтін картаны жазыңыз.
4. $(c;d)$ интервалын кез-келген $(a;b)$ интервалына бейнелейтін картаны жазыңыз.
5. Сандық өстің бойындағы $(0;2)$ интервалын $(-\infty;+\infty)$ интервалына бейнелейтін картаны жазыңыз.
6. $(-\infty;+\infty)$ интервалын $(0;2)$ интервалына бейнелейтін картаны жазыңыз.
7. $(-\infty;+\infty)$ интервалын $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалына бейнелейтін жылдамдықтары әртүрлі карталарды жазыңыз.
8. $(a;b)$ интервалының бейнесі $(1;0)$ нүктесі ойып тасталған бірлік шеңбер болатындай карта құрастырыңыз.

9. $(0; 2\pi)$ интервалының бейнесі $(-R; 0)$ нүктесі ойып тасталған, радиусы R-ға тең шеңбер болатындай карта құрастырыңыз.
10. $(a; b)$ интервалының бейнесі $(0; -R)$ нүктесі ойып тасталған, радиусы R-ға тең шеңбер болатындай карта құрастырыңыз.
11. $(a; b)$ интервалының бейнесі $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ нүктесі ойып тасталған бірлік шеңбер болатындай карта құрастырыңыз.
12. $(0; 2\pi)$ интервалының бейнесі $(0; 0)$ нүктесі ойып тасталған лемниската болатындай карта құрастырыңыз.
13. Шеңбердің атласын үш картамен құраңыз.
14. $(0; 2)$ интервалының бейнесі бір өлшемді тегіс көпбейне –парабола $(0; 1), (1; 2), (2; 5)$ нүктелерінен өтетіндей етіп карта құрастырыңыз.
15. $(a; b)$ интервалының бейнесі бір өлшемді тегіс көпбейне – конустық сызық болатындай карта құрастырыңыз.